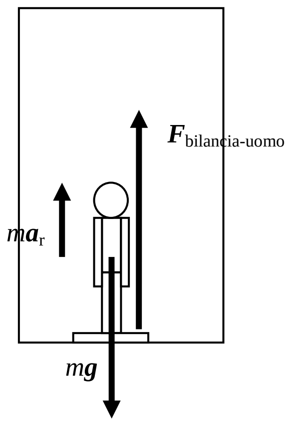
Esempi di esercizi risolti

Esempio 1 Forze apparenti: ascensore accelerato.
L'ascensore di un grande grattacielo raggiunge la velocità di 6.0 m/s in 2.5 secondi. Supponendo che in questo intervallo la sua accelerazione sia costante, quale peso segna una bilancia pesapersone su cui è appoggiato un signore che normalmente pesa 80 kg? (Si supponga che la bilancia raggiunga l'equilibrio istantaneamente, ossia in tempi molto inferiori ai 2.5 secondi indicati dal problema.)

Soluzione.

La risposta dipende dal verso dell'accelerazione, il cui modulo vale $a = \Delta v/\Delta t = 2.4\ \mathrm{m/s^2}$. Nel sistema di riferimento solidale all'ascensore per un oggetto di massa m compare una forza apparente $\boldsymbol{F}_{\mathrm{app}} = -m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$, dove $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ è l'accelerazione del sistema non inerziale (l'ascensore) rispetto a quello inerziale (il grattacielo). La persona che si trova nell'ascensore sentirà dunque, rispetto al sistema dell'ascensore, una forza «totale» data dalla forza di gravità più la forza apparente, e sarà questa la forza «totale» che l'uomo esercita sulla bilancia:
$\boldsymbol{F}_{\text{uomo-bilancia}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{tot}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{app}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{g}} = -m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + m\boldsymbol{g}.$

Naturalmente allo stesso risultato si può arrivare considerando il problema dal sistema di riferimento (inerziale) del grattacielo. In questo sistema vediamo la persona muoversi di moto accelerato con accelerazione $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$. Su di essa deve pertanto agire una forza totale pari a $m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$. La forza totale è la somma della forza esercitata dalla bilancia sulla persona e della forza di gravità: $m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} =. \boldsymbol{F}_{\text{bilancia-uomo}} + m\boldsymbol{g}$ ossia $\boldsymbol{F}_{\text{bilancia-uomo}} = m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - m\boldsymbol{g}.$
Sapendo che $\boldsymbol{F}_{\text{bilancia-uomo}} = -\boldsymbol{F}_{\text{uomo-bilancia}}$, si ricava il risultato trovato sopra con la forza apparente.



La bilancia pesapersone non misura la massa m ma il modulo della forza peso $F = mg$ che la molla della bilancia è chiamata ad equilibrare. L'indicatore della bilancia è tarato in modo da segnare 1 kg per un oggetto di massa m = 1 kg e di peso F = mg = 9.81 N.. La «massa» indicata dalla bilancia non è dunque altro che la forza da essa misurata divisa per l'accelerazione di gravità g: $m_{\mathrm{ind}} = F/g$.

Nel caso in cui l'ascensore stia accelerando verso l'alto (dunque nel caso in cui $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ha verso opposto rispetto a $\boldsymbol{g}$), la forza apparente ha lo stesso verso di quella di gravità. Il modulo della forza totale vale dunque $F_{\mathrm{tot}} = m\,(a_{\mathrm{r}} + g)$: la persona risente di una forza verso il basso di intensità maggiore rispetto alla normale forza peso.
La massa indicata dalla bilancia sarà $m_{\mathrm{ind}} = F_{\mathrm{tot}}/g = m\,(g + a_{\mathrm{r}})/g = m\,(1 + a_{\mathrm{r}}/g) = 80\ \mathrm{kg}\,(1 + 2.4/9.81) \approx 100\ \mathrm{kg}$

Nel caso in cui l'ascensore stia scendendo la forza apparente cambia di segno rispetto a quella di gravità, e la bilancia segnerà un peso inferiore: $m_{\mathrm{ind}} = F_{\mathrm{tot}}/g = m\,(g - a_{\mathrm{r}})/g = m\,(1 - a_{\mathrm{r}}/g) = 80\ \mathrm{kg}\,(1 - 2.4/9.81) \approx 60\ \mathrm{kg}$

Esempio 2. Forze apparenti: forza centrifuga

Un'auto sta percorrendo un tratto rettilineo di strada a velocità v. La strada curva di 90° tracciando un arco di circonferenza di raggio R
Se il coefficiente di attrito statico, a causa della presenza di ghiaccio, vale $\mu = 0.05$ qual è la velocità massima con cui l'auto può affrontare la curva senza slittare?

Soluzione.

Nel sistema di riferimento solidale all'automobile, che sta compiendo un (tratto di) moto circolare uniforme percorrendo un arco di raggio R con velocità v, compare una forza apparente centrifuga orientata in direzione radiale e diretta verso l'esterno della curva, di modulo

$$F_{\mathrm{CF}} = ma_{\mathrm{CF}} = mv^2/R$$

Nel sistema accelerato solidale con la vettura questa è ferma, dunque la forza centrifuga apparente deve essere bilanciata dall'attrito degli pneumatici con il suolo. Ricordando che il coefficiente di attrito statico μ è tale che
$F^{\mathrm{attr}}_{\mathrm{max}} = \mu F_{\mathrm{peso}}$, si ha che forza di attrito può valere al massimo μmg.
Deve essere

$$\mathrm{F}^{\mathrm{attr}}_{\mathrm{max}} = F_{\mathrm{CFmax}} = ma_{\mathrm{CFmax}} = m\, v_{\mathrm{max}}^2/R = \mu mg, \qquad \text{dunque}$$

$v_{\mathrm{max}}^2 = \mu gR$ *(calcolare)*

Alla stessa conclusione si arriva considerando il problema dal sistema inerziale (quello della strada). In questo sistema l'auto sta percorrendo un tratto moto circolare uniforme e quindi necessita di una forza centripeta di modulo $ma_{\mathrm{CP}} = mv^2/R$. Poiché tale forza è fornita dall'attrito degli pneumatici con il suolo, si ottengono le relazioni trovate sopra.

Esempio 3. Conservazione quantità di moto

Luciana Littizzetto e Giuliano Ferrara stanno pattinando sul ghiaccio, e si ritrovano entrambi fermi, l'uno di fronte all'altra. La Littizzetto dà uno spintone a Ferrara, il quale comincia a muoversi con una velocità $v_{\mathrm{F}} = 0.50$ m/s. Supponendo che Ferrara pesi $M = 150$ kg e che la Littizzetto pesi $m = 45$ kg:

a) quanto varrà, in modulo, la velocità di rinculo di quest'ultima dopo lo spintone?
b) quanto varrà la velocità di allontanamento (vel. relativa) tra i due personaggi?

Soluzione
a) La quantità di moto totale del sistema Ferrara+Littizzetto si conserva, dato che la forza esterna totale agente è nulla. La quantità di moto totale è zero prima dello spintone e quindi sarà zero sempre: dopo lo spintone entrambi i personaggi avranno quantità di moto esattamente opposte (dunque uguali in modulo)

$m v_L = M v_F$ da cui $v_L = \frac{M}{m} v_F = \frac{150kg}{45kg} 0.50\,\text{m/s} \cong 1.7\ \text{m/s}$

b) La velocità relativa è la differenza vettoriale tra le due velocità. Siccome queste sono opposte, il suo modulo sarà la somma dei moduli. I due personaggi si allontanano dunque a una velocità

$$v_R = |\vec{v}_R| = |\vec{v}_L - \vec{v}_F| = v_L + v_F = (0.50 + 1.7)\text{m/s} = 2.2\text{m/s}$$

Esercizio:

Un uomo di 72kg si trova in un ascensore su un dinamometro a molla. Partendo da fermo l'ascensore sale, raggiungendo la sua massima velocità di 1,20 m/s in 0,8 secondi e continuando a questa velocità costante per i successivi 5 secondi.
L'ascensore poi procede con una accelerazione uniforme per 1,5 s lungo la direzione negativa dell'asse y, dopodiché si ferma. Cosa registrerà il dinamometro:
a) durante i primi 0,8 secondi?
b) mentre l'ascensore procede a velocità costante?
c) durante il tempo in cui decelera?.

L'uomo nell'ascensore fermo, pesa: Fpeso = 72 x 9,8 = 705,6 N

Quando l'ascensore accelera verso l'alto, l'uomo all'interno subisce l'accelerazione verso il basso che si somma all'accelerazione di gravità. L'ascensore non è più un sistema inerziale.

a1 = 1,2/0,8 = 1,5 m/s^2

Fpeso = 72 x (9,8 + 1,5) = 72 x 11,3 = 813,6 N (pesa di più, si sente schiacciato verso il basso).

Quando la velocità è costante, il sistema è inerziale, cioè non c'è accelerazione e il peso dell'uomo rimane normale = 705,6 N

Quando l'ascensore decelera l'uomo si sente spinto verso l'alto, subisce una accelerazione verso l'alto che si sottrae a g = 9,8 m/s^2

a2 = (0 – 1,2) /1,5 = – 0,8 m/s^2

Fpeso = 72 x (9,8 – 0,8) = 648 N (si sente più leggero).

PROBLEMA(attenzione)

Un insetto cammina in direzione radiale verso l’esterno con velocità relativa v= 1 cm/s su un disco orizzontale scabro rotante alla velocità angolare ω=4,7 rad/s. Se il coefficiente di attrito statico è μ_s= 0,08, a quale distanza dal centro del disco l’insetto inizierà a slittare?

ooooo

SOL.- Nel sistema di riferimento rotante col disco oltre alla forza peso e alla reazione del vincolo agiranno una forza centrifuga e una forza di Coriolis la cui risultante deve essere

$F_{orizz} = (m^2\omega^4 r^2 + 4m^2\omega^2 v^2)^{1/2} \leq mg\mu_s$ da cui si ricava r_{max}= 3,5 cm.

Problema (importante)

Un treno che percorre un tratto rettilineo accelera uniformemente passando da 72 Km/h a 144 Km/h in 20 secondi.

- Calcolare l'angolo che un pendolo semplice di 1 Kg di massa appeso al soffitto di una carrozza forma rispetto alla verticale e la tensione cui è sottoposta la fune.

(Guardare la spiegazione data negli appunti)

Risoluzione

I moduli delle velocità iniziale e finale in unità S.I. sono

$$v_i = 20\frac{m}{s} \qquad v_f = 40\frac{m}{s}$$

L'accelerazione costante è

$$a = \frac{40-20}{20}\frac{m}{s^2} = 1\frac{m}{s^2}$$

Nel sistema non inerziale ancorato alle pareti di una carrozza oltre all'accelerazione di gravità verticale di modulo g agisce un'accelerazione orizzontale di modulo a.

La condizione di equilibrio del pendolo si ha quando la componente verticale della tensione **F** della fune uguaglia il peso e la componente orizzontale della tensione uguaglia l'accelerazione.

Indicando con θ l'angolo di deflessione del pendolo dalla verticale, si ha

tg θ= a/g

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{a}{g} = \operatorname{arctg}\frac{1}{9,8} \cong 5°50'$$

In condizione di equilibrio il modulo F della tensione risulta

$$F = m\sqrt{a^2 + g^2} \cong 9,85N$$

BATTUTA SMORZATA

Una palla da baseball di 0,144 kg vola verso la “casa base” con una velocità di modulo 43,0 m/s quando viene “smorzata” (colpita leggermente) con una mazza. Questa esercita una forza media di $6,50 \cdot 10^3$ N sulla palla per 1,30 ms. La forza media è verso il lanciatore.
Quale è il modulo della velocità finale della palla?

Soluzione

1. Scriviamo la relazione tra la variazione della quantità di moto e l'impulso

$$\Delta p = p_f - p_i = I = F_m \Delta t$$

2. Risolviamo rispetto alla quantità di moto finale

$$p_f = F_m \Delta t + p_i$$

3. calcoliamo la quantità di moto iniziale

$$p_i = mv_i = -6{,}19\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$$

4. calcoliamo l’impulso

$$I = F_m \Delta t = 8{,}45\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$$

5. Utilizziamo questi risultati per trovare la quantità di moto finale (sostituendo nella 2)

$$p_f = 2{,}26\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$$

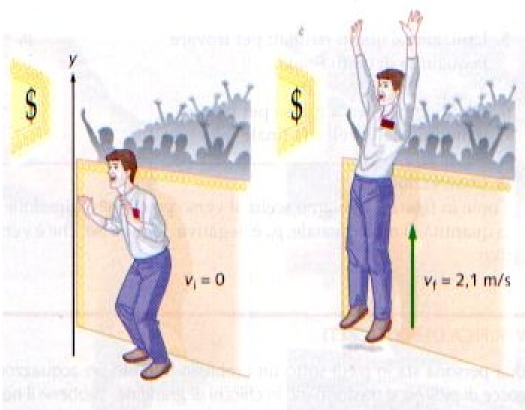
6. Dividiamo p_f per la massa per trovare il modulo della velocità finale

$$v_f = p_f/m = 15{,}7\mathrm{m/s}$$

Osservazioni

E’ stato scelto il verso positivo in direzione del lanciatore, quindi la quantità di moto iniziale p_i è negativa. L’impulso, che è verso il lanciatore, è positivo

SALTARE DALLA GIOIA



Dopo aver vinto un premio in una gara, uno spettatore di 72 kg salta per la gioia.

a) Se il salto produce una velocità verso l’alto di 2,1 m/s, quale è l’impulso avvertito dallo spettatore?

b) Prima del salto, il pavimento esercita una forza mg sullo spettatore. Quale ulteriore forza media esercita il pavimento, se lo spettatore spinge verso il basso su di esso per 0,36 s durante il salto?

Descrizione

La figura mostra che il moto è unidimensionale. Scegliamo come verso positivo quello in alto, quindi la quantità di moto finale è positiva.

Strategia

a. L’impulso è la variazione della quantità di moto. Conosciamo il valore delle velocità iniziale e finale e la massa dello spettatore; quindi possiamo calcolare la variazione della quantità di moto Dp utilizzando
p = mv.

b. Il modulo della forza media aggiuntiva e Δp / Δt, dove Δt è 0,36 s.

Soluzione

a.

1. Scriviamo l'espressione dell'impulso, osservando che $v_i = 0$ $\quad I = \Delta p = p_f - p_i = mv_f$
2. Sostituiamo i valori numerici

$$I = mv_f = (72\ \mathrm{kg}) \cdot (2{,}1\ \mathrm{m/s}) = 150\ \mathrm{kg \cdot m/s}$$

b.

3. Esprimiamo la forza media, utilizzando

$$F_m = \frac{I}{\Delta t} = \frac{150\ \mathrm{kg\,m/s}}{0{,}36\mathrm{s}} = 420\ \mathrm{kg \cdot m/s^2} = 420\mathrm{N}$$

l'impulso I e l'intervallo di tempo Δt

Osservazioni

La forza media aggiuntiva esercitata dal pavimento è piuttosto grande; infatti 420 N corrisponde approssimativamente a 43 kg (circa il 60% di peso dello spettatore). La forza totale esercitata verso l'alto dal pavimento è mg + 420 N = 710 N + 420 N che corrispondono a circa 115 kg. Lo spettatore, naturalmente esercita la stessa forza verso il basso. Fortunatamente lo spettatore ha bisogno di esercitare quella forza soltanto per circa un terzo di secondo.

Problema

Se lo spettatore atterra con una velocità di modulo 2,1 m/s e si ferma in 0,25 s, qual è il modulo della forza media esercitata dal pavimento durante l'atterraggio?

ESERCITAZIONE IMPULSO E QUANTITA' DI MOTO – PROBLEMI
(se volete potete esercitarvi)

1 In un tipico tiro di golf, la mazza è a contatto con la palla per circa 0,0010 s.
Se la pallina di massa 45 g acquista una velocità di modulo 65 m/s, stima il modulo della forza esercitata dalla mazza sulla palla.
(R: $2{,}9 \cdot 10^{3}$ N)

2 Trova il modulo dell'impulso impresso su un pallone da calcio quando un giocatore lo calcia con una forza di 1250 N. Assumi che il piede del giocatore resti a contatto con la palla per $6{,}20 \cdot 10^{-3}$ s.
(R: 7,75N)

3 Un giocatore di pallavolo effettua una schiacciata, cambiando così la velocità della palla da 4,5 m/s a – 23 m/s lungo un certo verso.
Se l'impulso rilasciato sulla palla dal giocatore è pari a – 9 kg · m/s, quale sarà la massa del pallone?
(R: 0,3kg)

4 Una palla da croquet di 0,50 kg è inizialmente ferma sull'erba. Quando la palla viene colpita da una mazza, la forza media esercitata su di essa è di 230 N.
Se il modulo della velocità della palla dopo essere stata colpita è di 3,2 m/s, per quanto tempo la mozza è rimasta a contatto con la palla?
(R: $7 \cdot 10^{-3}$ s)

5 Per effettuare un rimbalzo un giocatore di basket lancia un pallone di 0.60 kg sul pavimento. Il pallone colpisce il suolo con una velocità di modulo 5,4 m/s con un angolo di 65° rispetto alla verticale.
Se la palla rimbalza con la stessa velocità e lo stesso angolo, qual è l'impulso impressole dal pavimento?
(R: 2,7kg m/s)

Esercizio: Supponiamo che una cordicella (di massa trascurabile) tenga assieme alle due estremità opposte di una
molla compressa (anch'essa di massa trascurabile) due corpi di massa $m1 = 1\ Kg, m2 = 2\ Kg$. La corda viene
bruciata (forza esterna trascurabile) e due corpi si allontanano l'uno dall'altro su una superficie priva d'attrito, $m1$ si
allontana verso sinistra con una velocità pari a $v1 = 1{,}8\ m/s$. Qual è, in modulo e verso, la velocità di $m2$?
(Soluzione: v2 = 0,9 m/s . La velocità è nel verso positivo delle x, ossia verso destra)

Su una rotaia priva di attriti sono appoggiati due carrelli, tra i quali è tenuta compressa una molla. I due carrelli A e B hanno masse 400g e 250g. Lasciando scattare la molla, essa lancia i due carrelli in versi opposti. Si sa che il carrello A percorre 20 cm in un secondo.

1. Qual è la velocità di A e quella di B dopo lo scatto della molla?
2. Qual è l'impulso impresso su A e su B dalla molla?

R: 0.2 m/s; -0.32 m/s; 0.08 Ns

ESERCIZI SU IMPULSO, QUANTITà DI MOTO E URTI(la soluzione è guidata)

1.Un corpo di massa m_1 = 8 kg si muove con velocità v_1 = 4 m/s ed urta un altro corpo di massa m_2 = 0,5 kg, inizialmente fermo. I due corpi rimangono attaccati e quindi formano un unico corpo .Calcola la velocità V_* dei due corpi uniti assieme dopo l'urto.

***

Il sistema dei due corpi è da considerarsi isolato (non ci sono forze che agiscono dall'esterno), quin di Si conserva la quantità di moto ***p*** totale del sistema.

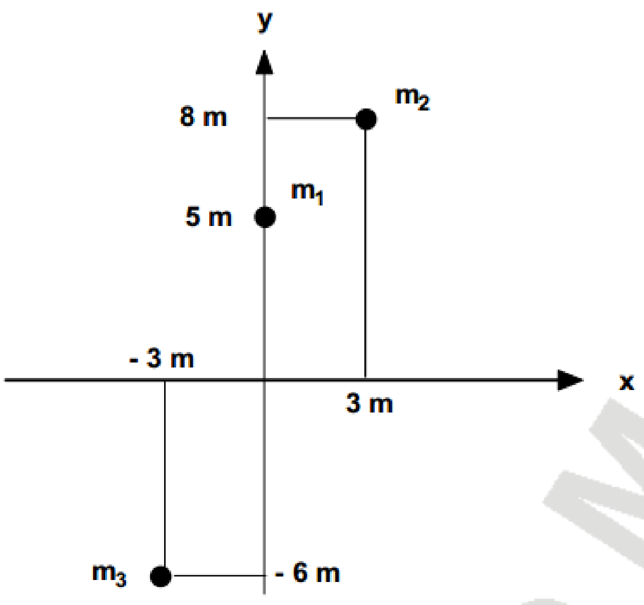
p dopo l'urto , attento che la massa totale è la somma delle due masse

p prima dell'urto , attento alla quantità di mo to del sistema , il secondo co rpo è fermo quindi

da cui:

centro di massa – esercizio n. 2

Un sistema è formato dalle seguenti masse, situate nel piano xy: m_1 = 4,0 kg nel punto (0 m, 5,0 m), m_2 = 7,0 kg nel punto (3,0 m, 8,0 m) e m_3 = 5,0 kg nel punto (–3,0 m, –6,0 m).
Si determini il centro di massa del sistema.
R.: 0,38 m ; 2,88 m ;



Le coordinate del centro di massa si ricavano utilizzando la definizione:

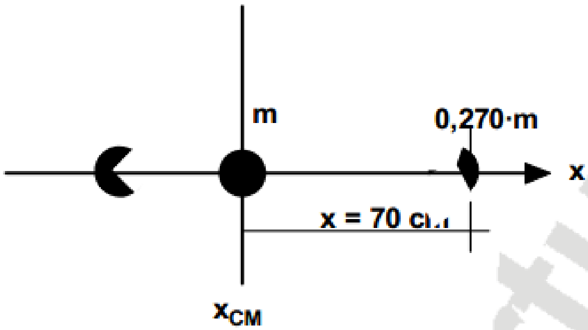
$$x_{CM} = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{\sum m_i} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + x_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{0 \cdot 4 + 3 \cdot 7 - 3 \cdot 5}{4 + 7 + 5} = 0{,}38 \text{ m}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum y_i \cdot m_i}{\sum m_i} = \frac{y_1 \cdot m_1 + y_2 \cdot m_2 + y_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{5 \cdot 4{,}0 + 8 \cdot 7{,}0 - 6 \cdot 5{,}0}{4{,}0 + 7{,}0 + 5{,}0} = 2{,}88 \text{ m}$$

Come si nota basta sostituire le coordinate dei punti

centro di massa – esercizio n. 3

Una sfera di massa m, situata nell'origine di un sistema di coordinate, esplode in due frammenti che partono lungo l'asse x in direzioni opposte. Quando uno dei frammenti (avente una massa di 0,270·m si trova nel punto x = 70 cm, dove si trova l'altro frammento?
R.: – 26 cm ;



Le forza che fa espoldere la massa m è interna al sistema. Essendo quindi nulla la risultante delle forze esterne, il centro di massa del sistema rimane immobile, benché i due frammenti si muovano in verso opposto.
Prendendo l'origine del sistema di coordinate nel centro di massa, si ha:

Le coordinate del centro di massa si ricavano utilizzando la definizione:

$$x_{CM} = 0 = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{\sum m_i} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

dove x_1 ed x_2 indicano la posizione dei centri di massa dei due frammenti.

Se m_1 = 0,270·m ed x_1 = 0,7 m, l'equazione diventa:

$$0 = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}270 \cdot m + x_2 \cdot (1 - 0{,}270 \cdot m)}{m} \qquad 0 = \frac{m \cdot (0{,}189 + 0{,}730 \cdot x_2)}{m} \qquad x_2 = -0{,}26 \text{ m}$$

E' molto conveniente prendere l'origine del sistema di riferimento nel centro di massa (valore zero)
Essendo il risultato negativo vuol dire che il frammento sta da parte opposta.

Problema 1

Un carro di massa $m_1 = 350\,\mathrm{kg}$ si muove con velocità $v_1 = 7.2\,\mathrm{m/s}$ quando un fanciullo, di massa $m_2 = 43\,\mathrm{kg}$, corre incontro al carro e vi salta su con una velocità avente verso opposto alla velocità del carro e modulo $v_2 = 3.7\,\mathrm{m/s}$; determinare il modulo v della velocità finale del carro con sopra il fanciullo.

Soluzione

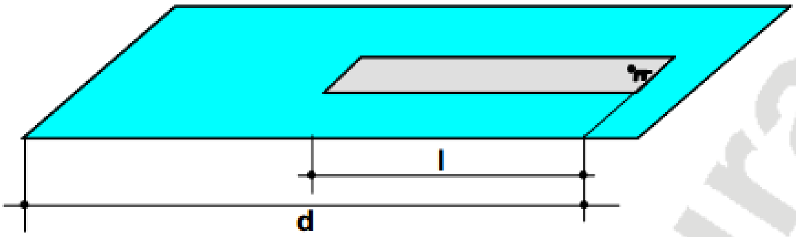
Quando il fanciullo salta sul carro, non vi sono altre forze esterne agenti; quindi la quantità di moto totale si conserva; poiché dopo il salto carro e fanciullo hanno la stessa velocità, deve valere, tenendo conto dei versi delle velocità;

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \qquad \longrightarrow \qquad v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 6.0\,\mathrm{m/s}\ .$$

La velocità V2 è negativa perché il ragazzo va incontro al carrello quindi in verso opposto, e dopo il salto le due masse sono un'unica massa che somma delle due masse

Attenzione e importante

Un cane di massa m = 5 kg è fermo all'estremo di una zattera di massa M = 20 kg e dista d = 6 m dalla riva. Esso cammina per l = 3 m (l , lunghezza della zattera) verso la riva e si ferma. Quanto dista il cane dalla riva ?
R.: 3,6 m ;



Trascurando l'attrito tra la zattera e l'acqua, non vi sono forze orizzontali che agiscono sul sistema costituito dal cane e dalla canoa. Quindi il centro di massa del sistema rimane fermo relativamente alla costa (o a qualsiasi punto fisso). Quando il cane si muove avvicinandosi alla costa, la zattera deve muoversi allontanandosi dalla costa in modo tale che la posizione del centro di massa del sistema rimanga costante.

Calcoliamo l'ascissa del centro di massa del sistema rispetto alla costa (quando il cane è nel punto più lontano dalla costa):

$$x_{CM} = \frac{m \cdot d + M \cdot \left(\frac{d}{2} + \frac{l}{2}\right)}{m + M} = \frac{5 \cdot 6 + 20 \cdot \left(\frac{6}{2} + \frac{3}{2}\right)}{5 + 20} = 4{,}8\ \mathrm{m}$$

Il centro di massa deve rimanere inalterato anche quando il cane si è spostato lungo la zattera e pertanto:

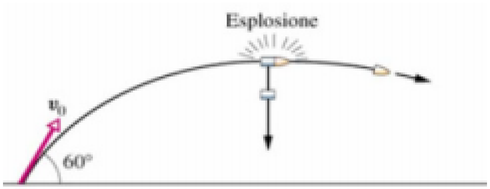
$$4{,}8 = \frac{m \cdot x + M \cdot \left(x + \frac{l}{2}\right)}{m + M} \qquad 4{,}8 = \frac{5 \cdot x + 20 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)}{5 + 20} \qquad 4{,}8 \cdot 25 = 5 \cdot x + 20 \cdot x + 30$$

x = 3,6 m

In un primo momento ci calcoliamo il centro di massa del sistema, poi ci calcoliamo la posizione del cane nella nuova configurazione , ma tenendo conto che il centro di massa è rimasto fermo(il sistema è a forze interne).

Importante

4. Un cannone ha sparato una granata con una velocità iniziale v_0 = 20 m/s con un angolo di 60° rispetto all'orizzontale. Al vertice della traiettoria la granata esplode rompendosi in due frammenti di uguale massa. Uno dei due frammenti, che immediatamente dopo l'esplosione ha velocità nulla, cade verticalmente.
Trascurando la resistenza dell'aria, determina a quale distanza dal cannone cade l'altro frammento.



Nella prima metà il moto è un normale moto parabolico. Nel punto più alto(dove esplode) si applica la conservazione della quantità di moto. Prima lungo l'asse x e poi lungo y.
La Px,i (prima) è la quantità di moto del proiettile nel punto più in alto lungo x, la Py,i (prima) è nulla in quanto nel punto più alto la velocità è solo orizzontale e la Vy è nulla.
Dopo l'esplosione
Con v'x indichiamo la velocità del frammento lungo x, la cui massa è m/2, come si dimostra esso parte con velocità doppia. Il frammento che cade con velocità nulla non ha nessuna componente orizzontale, praticamente cade come un corpo in caduta libera lungo al verticale. Per calcolare la posizione del secondo frammento basta calcolare che il tempo all'andata deve essere uguale al ritorno, quindi basta calcore la distanza percorsa lungo x nel secondo periodo con lo stesso tempo necessario a salire fino alla posizione max.

Soluzione Alla sommità della traiettoria la velocità è orizzontale e pari a $v_{0x} = v_0 \cos(\pi/3) = v_0/2$. Quindi, prima e dopo l'esplosione, la conservazione della quantità di moto impone

$$\begin{aligned} p_{x,i} &= p_{x,f} \quad \rightarrow \quad m v_{0x} = \frac{m}{2}\cdot 0 + \frac{m}{2} v'_x = \frac{m}{2} v'_x \quad \Rightarrow \quad v'_x = 2 v_{0x} \\ p_{y,i} &= p_{y,f} \quad \rightarrow \quad m \cdot 0 = \frac{m}{2}\cdot 0 + \frac{m}{2} v'_y = \frac{m}{2} v'_y \quad \Rightarrow \quad v'_y = 0 \end{aligned}$$

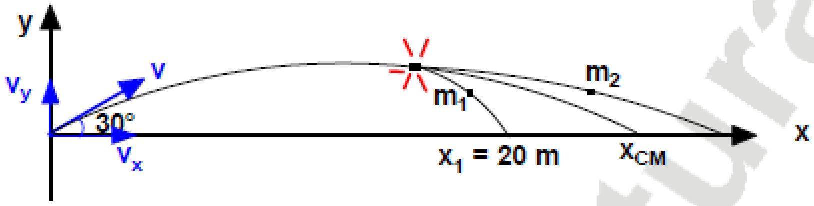
Il tempo per raggiungere la sommità della traiettoria (e per tornare al suolo) è dato da

$$v_{0y} - g t_{max} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_{max} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin(\pi/3)}{g} = \frac{\sqrt{3} v_0}{2g},$$

e perciò il secondo frammento cadrà alla distanza

$$d = v_{0x} t_{max} + v'_x t_{max} = 3\frac{v_0}{2} t_{max} = \frac{3\sqrt{3} v_0^2}{4g} = 53.0 \text{ m}.$$

Un proietto è lanciato con una velocità di 20 m/s sotto un angolo di 30° con l'orizzontale. Nel corso della sua traiettoria esplode, suddividendosi in due frammenti, uno dei quali ha una massa doppia di quella dell'altro. I due frammenti colpiscono il suolo nello stesso istante. Il frammento con la massa minore colpisce il suolo a 20 m dal punto di lancio nel verso in cui è stato sparato il proietto. In quale punto colpisce il suolo il secondo frammento?
R.: 43 m ;



Scomponiamo la velocità v nelle sue due componenti v_x e v_y:

$v_x = v \cdot \cos 30°$

$v_y = v \cdot \text{sen}30°$

Supponiamo che il proietto non esploda e calcoliamo il suo punto di impatto col suolo, punto che corrisponderà al punto di impatto del cento di massa del proietto.
Le leggi del moto saranno:

$x = v_x \cdot t$

$y = v_y \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

Quando il proietto sarà al suolo il valore di y sarà y = 0:

$0 = v_y \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2} \cdot g \cdot t - v_y\right) \cdot t = 0$

Le soluzioni risultano essere:

$t = 0$ istante in cui il proietto parte

$t = \frac{2 \cdot v_y}{g}$ istante in cui il centro di massa del proietto ricade al suolo

La distanza di caduta del centro di massa del proietto sarà:

$x_{CM} = v_x \cdot t = v_x \cdot \frac{2 \cdot v_y}{g} = v \cdot \cos 30° \cdot \frac{2 \cdot v \cdot \text{sen}30°}{g} = \frac{v^2}{g} \cdot \text{sen}60° = \frac{20^2}{9{,}8} \cdot \text{sen}60° = 35{,}34 \text{ m}$

Indichiamo con $m_1 = m$ ed $m_2 = 2 \cdot m$ le masse dei due frammenti di cui m_1 sia la più piccola che colpisce il suolo alla distanza $x_1 = 20$ m:
Poiché il centro di massa deve restare inalterato si deve verificare che:

$x_{CM} = \sum \frac{x_i \cdot m_i}{m_i} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad x_{CM} = \frac{x_1 \cdot m + x_2 \cdot 2 \cdot m}{m + 2 \cdot m} \quad \Rightarrow$

$x_{CM} \cdot 3 \cdot m - x_1 \cdot m = 2 \cdot m \cdot x_2 \quad \Rightarrow$

$x_2 = \frac{m \cdot (3 \cdot x_{CM} - x_1)}{2 \cdot m} = \frac{3 \cdot x_{CM} - x_1}{2} = \frac{3 \cdot 35{,}34 - 20}{2} = 43 \text{ m}$

5. Determina le coordinate del centro di massa del sistema costituito dalle tre masse in figura.
Le masse sono m_1 = 20kg, m_2 = 10kg ed m_3 = 30kg, le distanze sono espresse in metri.
Successivamente la massa m_3 si sposta nel punto di coordinate (3;4) in 5 secondi. Indica sul grafico lo spostamento del centro di massa e calcola la velocità media del moto del centro di massa.